

Data Structures and algorithms

Instructor : Dr.Amin Eskandari

Head-Ta's : Hamid Namjoo manesh , Amir Hossein Hemati , Ali Mojahed

Ta's : Amir Mohammad Asadjoo , Padina razmjooi , Armin Janfaza , Alireza Heydari , Mahdi Torabi ,
Maryam Ghorbani , Fatemeh Keshavarz , MohammadReza Fasli , Abolfazl Tadrissi

سوالات آزمون شماره 03

۴ سوال و ۱.۵ ساعت زمان



سوال اول : آزمون نهایی بقا در یخبندان - آقوی زیگلری و داده ساختارهای منجمد در Yakutsk 🧊
جَونوم براتون بگه که.. 📄

پس از فرار معروف آقوی زیگلری با قاشق چای خوری، او مسیر تونل را گم کرد و بجوی ترمینال شماره سیزع شیراز، از دل زمین در **یاکوتسک (Yakutsk)**، سردترین شهر جهان با دمای $-۵۵^{\circ}C$ ، سر برآورد. در کمال تعجب، «لولو إسفندیاری» (رئیس آدم خوارا) که از گرموی شیراز به روسیه مهاجرت کرده بود، اکنون رئیس باند خلافکاران یاکوتسک شده بود! لولو و دارودشش مشتریان دائمی دوکون جدید آقوی زیگلری (فروش پیش و مهره و نان بربری یخ زده) شدند.

آقوی زیگلری برای مدیریت این اوضاع، یک کامپیوتر کهنه (یه پوتیتووعه خالص 🍊) با حافظه‌ی بسیار محدود و بدون کتابخانه‌های آماده در اختیار دارد و مجبور است فقط از داده ساختارهایی که سر کلوسای هنرستان حاج قوام یاد گرفته بود، استفاده کند. شما به عنوان مشاور فنی آی زیگلری

استخدام شده‌اید تا با طراحی الگوریتم‌ها، مغازه را از ورشکستگی و آی زیگیری رو از این فلاکت نجات دهید.

بخش ۱ – صف مشتریان بی‌قانون (۳۰٪ نمره)

در سرمای شدید، مشتریان مقابل قسمت نونوایی دوکون صف می‌کشند که قوانین صف بسی عجیب!

- مشتریان عادی از **انتهای صف** وارد می‌شوند.
- دارودسته‌ی لولو (VIP) از **جلوی صف** می‌پرند.
- بعضی‌ها از شدت یخ‌زدگی از **انتهای صف** فرار می‌کنند.
- آقوی زیگیری یک **دوکمه‌ی Undo** می‌خواد که آخرین عملیات روی صف را خنثی کنه.

الف. برای پشتیبانی از همه‌ی این عملیات در $O(1)$ از چه داده‌ساختاری استفاده می‌کنید؟ دو متغیر اصلی آن را نام ببرید و فرمول یافتن اندیس اضافه‌کردن به جلو و حذف از عقب را بنویسید.

ب. مکانیسم **Undo** را با استفاده از یک **پشته (Stack)** توضیح دهید. چه اطلاعاتی را در پشته ذخیره می‌کنید و هنگام فراخوانی `undo()` چه اقداماتی انجام می‌دهید؟ (نیازی به کد کامل نیست؛ سودوکد (شبه‌کد) کافی است.)

ج. با فرض `max_size = 5`، دنباله‌ی زیر (طبعاً از چپ به راست) را اجرا کنید و محتوای صف را **پس از هر مرحله** نشان دهید:

`push_back(10) , push_back(20) , push_front(5) , pop_front() , undo() , push_back(30) , push_front(99) , pop_back() , undo()`

محتوای نهایی صف هم (ثواب داره) بگید. ❀

بخش ۲ – لیست VIP با درخت پیشوندی (۲۰٪ نمره)

لولو اسفندیاری لیست افراد ویژه را به صورت کلمات انگلیسی با حروف کوچک به آقوی زیگیری داده است. "lulu", "luka", "yak", "yakut":

برای صرفه‌جویی در حافظه‌ی محدود، باید از **Trie** استفاده شود.

- الف. Trie حاصل از درج کلمات بالا را رسم کنید (گره‌های mark شده را با ستاره مشخص کنید).
- ب. می‌خواهیم بررسی کنیم آیا رشته‌ای خاص پیشوند حداقل یکی از کلمات موجود است. توضیح دهید چه تغییری در روش درج می‌توان داد که ای کارو ساده‌تر بشه. سپس شبه‌کدی برای تابع `starts_with(prefix)` بنویسید و پیچیدگی آن را بگویید.
- ج. با همان Trie ساخته‌شده، خروجی `find("yaku")` و `starts_with("lu")` را مشخص کنید و توضیح دهید چرا این مقادیر به دست می‌آیند.

بخش ۳ – انبار پیچ و مهره با درخت جستجوی دودویی (۲۵٪ نمره)

- اندازه‌ی پیچ‌ها اعداد صحیح یکتا هستند. آقوی زیگلری می‌خواهد پیچ جدید اضافه کنه، پیچ گمشده را پیدا کند، یا پیچ خراب را حذف بکنه.
- الف. با اشاره به مثال پیچ و مهره در جزوه، توضیح بدید چرو درخت جستجوی دودویی (BST) یک بالانس (مصالحه) بین آرایه‌ی نامرتب و آرایه‌ی مرتب است. (پیچیدگی‌ها را ذکر کنید).
- ب. اعداد زیر به ترتیب (چپ به راست) در یک BST خالی درج می‌شوند:
15, 10, 20, 8, 12, 18, 25, 11
- درخت نهایی را رسم کنید. سپس مراحل حذف گره‌ی 10 را بر اساس سه حالت حذف توضیح دهید.
- پ. تابع `lca(root, x, y)` در BST چه کاری انجام می‌دهد؟ با استفاده از ویژگی ترتیبی BST، شبه‌کدی ساده برای یافتن پایین‌ترین جد مشترک بنویسید که در زمان $O(n)$ کار کند. سپس مقدار LCA را برای دو جفت (11, 18) و (8, 25) در درخت رسمی پیدا کنید.
- ت. اگر آقوی زیگلری پیچ‌ها را به ترتیب صعودی درج کند (مثلاً از ۱ تا n) شکل BST چیطوع میشه؟ و پیچیدگی جستجو چه تغییری می‌کند؟ نام یک درخت متوازن که این مشکل را حل می‌کند، را بَبرید. (فقط نام).

بخش ۴ – سامانه‌ی اولویت‌بندی یخ‌زدگی با Max-Heap (15٪ نمره)

- هر مشتری یک «سطح اضطراری» (عدد صحیح، بزرگتر = یخ‌زده‌تر) دارد. آقوی زیگلری می‌خواهد همیشه بحرانی‌ترین نفر را اول صدا بزنه تا شرش گنده بشه.

الف. آرایه‌ی نامرتب اولویت‌ها [32, 14, 50, 27, 63, 41, 18] را با روش ساخت هرم از پایین به بالا (Bubble-Down) به یک Max-Heap تبدیل کنید. (آرایه را از اندیس 1 شروع کنید.) مراحل را به صورت درخت و آرایه نمایش دهید.

ب. دو بار عملیات extract_max را روی هرم نهایی انجام دهید و آرایه‌ی حاصل را نشان دهید.

ج. چرا زمان ساخت هرم با این روش $O(n)$ است و نه $O(n \log n)$ ؟ با استدلال مربوط به برگ‌ها توضیح دهید.

بخش ۵ - تاریخچه‌ی دمای یاکوتسک با لیست پیوندی (۱۰٪ نمره)

دمای هوا هر ساعت ثبت می‌شود. رکورد جدید باید در ابتدای لیست اضافه شود (جدیدترین دمای هوا). گاهی هم یک رکورد اشتباهی باید حذف شود.

الف. چه داده‌ساختاری برای این منظور مناسب است؟ (نام ببرید و بگویید چه متغیرهایی دارد.) مزیت آن نسبت به آرایه در عملیات درج/حذف در ابتدا چیست؟

ب. شبه‌کدی برای اضافه‌کردن یک گره به ابتدای لیست و حذف یک گره‌ی مشخص (وقتی پوینتر (اشاره‌گر) به آن داریم را بنویسید. پیچیدگی این دو عملیات چقدر است؟

اگر آی زیگلری از Yakutsk تونست جون سالم به در ببرع، ما هم میتونیم پس....

This is adapted from Aghoy Ziglari's story und the Phase 2 project of the Data Mining course in Fall 2025.

سوال دوم: فرار از کوسه‌ی یخ‌زده با درخت دودویی! 🌳🐼

پس از یک کولاک سهمگین، آی زیگلری برای ماهی‌گیری به رودخانه‌ی یخ‌زده‌ی لنا رفت. ناگهان، یک کوسه‌ی غول‌پیکر از زیر یخ سر برآورد و مستقیماً به سمت او حمله کرد! آی زیگلری با یادآوری لطیفه‌ی

معروف «اگه تو دریا کوسه دنبالت کرد، برو بالای درخت»، نگاهی به دشت بی‌درخت یا کوتسک انداخت و فهمید که تنها راه نجاتش کشیدن یک درخت دودویی از روی پیمایش‌هاست!

آی زیگلری دست در کیسه‌اش کرد و 12 تکه طناب گره خورده جادویی پیدا کرد.

(الف) با این دوازده گره، چند درخت دودویی متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

ناگهان رشته حروفی به او الهام شد که به صورت زیر بود:

او دفترچه‌ی خیس خود را باز کرد و پیمایش‌های زیر را که از روی جعبه‌ی پیچ‌ها یادداشت کرده بود، پیدا کرد:

Pre-order : m b d a t e g h i c f n

Post-order : t a d h l g e b n f c m

(ب) با رسم درخت منحصر به فرد، تعداد گره‌های تک‌فرزندی، دوفرزندی و برگ‌ها را مشخص کنید.

(ج) دقیقاً بگویید کدام گره‌ها برگ و کدام‌ها دوفرزندی هستند.

  **سوال سوم: حل معمای زمان یخ‌زدایی با روابط بازگشتی**

آی زیگلری بعد از چالش‌های دریاچه لنا، یک دستگاه عجیب روسی به نام «یخ‌زدا ۳۰۰۰» خرید که با الگوریتم‌های بازگشتی، نان‌های بربری یخ‌زده را گرم می‌کند. دفترچه‌ی راهنماش پر از فرمول‌های پیچیده بود و او باید بدون هر تنظیم چقدر طول می‌کشد تا قبل از رسیدن لولو اسفندیاری (سردسته خلافاکارا)، نان‌ها را آماده کند.

مرتبه‌ی زمانی دقیق (بر حسب Θ) روابط بازگشتی زیر را به دست آورید:

۱. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^3 - 5$

۲. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log n$

۳. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 + 7n - 5$

 **سوال چهارم: کدهای باینری نقشی بازگشت (فرار!) به شیراز (ترمینال شماره 13 شیراز) با درخت**

پیشوندی دودویی

لولو اسفندیاری که دلش برای آی زیگلری و دارودسش سوخته، نقشه‌ی فرار از یاکوتسک به شیراز را به صورت **رشته‌های باینری** زیر در یک Trie دودویی ذخیره کرده بود به آی زیگلری می‌گه:

11 , 10 , 0011 , 000 , 00 , 01 , 101 , 100

الف) با شروع از یک درخت تهی، گام‌به‌گام رشته‌ها را به ترتیب درج کرده و **درخت دودویی نهایی** را رسم کنید. (برچسب یال‌ها 0 و 1 هستند.)

ب) **تعداد کل گره‌های** این Trie (اعم از گره ریشه، گره‌های میانی، و گره‌های علامت‌گذاری‌شده) چند تاس؟

نکته: ساختار Trie دودویی مشابه همان است که در جزوه برای حروف الفبا (۲۶ فرزند) دیدید، با این تفاوت که اینجا هر گره فقط دو یال 0 و 1 دارد و mark نشان‌دهنده‌ی پایان یک رشته است.